



Viernes 10 de julio de 2015

Problema 1. Decimos que un conjunto finito \mathcal{S} de puntos del plano es *equilibrado* si para cada dos puntos distintos A y B en \mathcal{S} hay un punto C en \mathcal{S} tal que $AC = BC$. Decimos que \mathcal{S} es *libre de centros* si para cada tres puntos distintos A, B, C en \mathcal{S} no existe ningún punto P en \mathcal{S} tal que $PA = PB = PC$.

- (a) Demostrar que para todo $n \geq 3$ existe un conjunto de n puntos equilibrado.
- (b) Determinar todos los enteros $n \geq 3$ para los que existe un conjunto de n puntos equilibrado y libre de centros.

Problema 2. Determinar todas las ternas (a, b, c) de enteros positivos tales que cada uno de los números

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

es una potencia de 2.

(Una potencia de 2 es un entero de la forma 2^n , donde n es un entero no negativo.)

Problema 3. Sea ABC un triángulo acutángulo con $AB > AC$. Sea Γ su circunferencia circunscrita, H su ortocentro, y F el pie de la altura desde A . Sea M el punto medio del segmento BC . Sea Q el punto de Γ tal que $\angle HQA = 90^\circ$ y sea K el punto de Γ tal que $\angle HKQ = 90^\circ$. Supongamos que los puntos A, B, C, K y Q son todos distintos y están sobre Γ en este orden.

Demostrar que la circunferencia circunscrita al triángulo KQH es tangente a la circunferencia circunscrita al triángulo FKM .



Language: **Spanish**

Day: **2**

Sábado 11 de julio de 2015

Problema 4. El triángulo ABC tiene circunferencia circunscrita Ω y circuncentro O . Una circunferencia Γ de centro A corta al segmento BC en los puntos D y E tales que B, D, E y C son todos diferentes y están en la recta BC en este orden. Sean F y G los puntos de intersección de Γ y Ω , tales que A, F, B, C y G están sobre Ω en este orden. Sea K el segundo punto de intersección de la circunferencia circunscrita al triángulo BDF y el segmento AB . Sea L el segundo punto de intersección de la circunferencia circunscrita al triángulo CGE y el segmento CA .

Supongamos que las rectas FK y GL son distintas y se cortan en el punto X . Demostrar que X está en la recta AO .

Problema 5. Sea \mathbb{R} el conjunto de los números reales. Determinar todas las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x)$$

para todos los números reales x, y .

Problema 6. La sucesión de enteros a_1, a_2, \dots satisface las siguientes condiciones:

- (i) $1 \leq a_j \leq 2015$ para todo $j \geq 1$;
- (ii) $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ para todo $1 \leq k < \ell$.

Demostrar que existen dos enteros positivos b y N tales que

$$\left| \sum_{j=m+1}^n (a_j - b) \right| \leq 1007^2$$

para todos los enteros m y n que satisfacen $n > m \geq N$.

Language: Spanish

*Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos*